УДК 517.524

Любимому папе посвящаю

Элементарный вывод формулы Ю. В. Нестеренко разложения в цепную дробь числа 2 × (3)

С.Н. Гладковский

Автором предложен элементарный вывод формулы Ю. В. Нестеренко разложения в цепную дробь числа 2 × (3), обладающая хорошей скоростью сходимости.
Ключевые слова: непрерывная дробь, цепная дробь, Дзета(3), zeta(3).

Как известно, 2 × (3) можно представить разными видами цепной дроби. Например, используя формулу для (3), данную Апери (см. напр. в [1]):

$$\left.\begin{aligned} 2\,(3) &= \frac{12}{A_0} \\ A_k &= 34k^3 + 51k^2 + 27k + 5 - \frac{(k+1)^6}{A_{k+1}} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

В работе 1996г. [2] Ю. В. Нестеренко отмечает, что после работы Апери "За прошедшие с тех пор почти 20 лет не было получено ничего принципиально нового." Несколько далее, раскрывая содержание, указанный автор пишет: " Ниже (§1) мы предлагаем доказательство теоремы 1, инициированное работой Л.А. Гутника [7], и затем (§2) доказываем следующую ниже теорему 2, где даётся новое разложение (3) в непрерывную дробь". На самом деле эта теорема о разложении 2 × (3) в непрерывную дробь (причина этого будет объяснена ниже):

" Теорема 2. Справедливо следующее разложение в непрерывную дробь

$$2\,(3) = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{2}{4 + \cfrac{6}{6 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{4 + \cfrac{6}{6 + \cfrac{12}{8 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{6 + \ldots}}}}}}}}}}}}, \quad (2)$$

где числители $a_n,\ n \geq 2,$ и знаменатели $b_n,\ n \geq 1,$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} b_{4k+1} &= 2k+2, & a_{4k+1} &= k(k+1), \\ b_{4k+2} &= 2k+4, & a_{4k+2} &= (k+1)(k+2), \\ b_{4k+3} &= 2k+3, & a_{4k+3} &= (k+1)^2, \\ b_{4k+4} &= 2k+2, & a_{4k+4} &= (k+2)^2.\text{"} \end{aligned}$$

В приведённой выше формулировке наглядны недостатки нынешней общепринятой системы записи цепной дроби:

– громоздкость записи;

– разная индексация для числителей и знаменателей (для числителей a_n отсчёт индекса начинается с 2, а для знаменателей b_n – с 1) вместо единой, например, как у вашего покорного слуги, с 0;

– затушевана периодичность структуры дроби.

Две последние причины вынудили сформулировать теорему для 2 (3), так как в случае для (3) создавали дополнительную громоздскость и нарушали стройность

формулировок и для числителей, и для знаменателей.

В работе (мне доступна версия только на английском) Л.А. Гутника [3], доложенной в октябре 2009г., представлено доказательство *двух других* цепных дробей для 2 (3).

Излагая результаты Апери и Нестеренко, Гутник сравнивает уже отредактированную им цепную дробь Нестеренко для   (3). И приходит к выводу: " It is easy to prove that numerator and denominator of Nesterenko fractions with subscript $4v$–2 are equal to the numerator and denominator of Apery fraction with subscript v, respectivily."

Собственно это замечание и побудило автора настоящей заметки вывести цепную дробь Нестеренко из так называемой цепной дроби Апери в виде (1) элементарными средствами.

Чтобы избежать путаницы в дальнейшем изложении, приведу результат Нестеренко в привычном для настоящей заметки виде:

$$\left.\begin{aligned} &2\ (3) = 2 + \frac{1}{N_0} \\ &N_k = 2k+2+\cfrac{(k+1)(k+2)}{2k+4+\cfrac{(k+1)^2}{2k+3+\cfrac{(k+2)^2}{2k+2+\cfrac{(k+1)(k+2)}{N_{k+1}}}}} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Перепишем (1) в виде:

$$\left.\begin{aligned} &(3) = \cfrac{6}{5-\cfrac{1^6}{A_0}} \\ &A_k = 34(k+1)^3+51(k+1)^2+27(k+1)+5-\frac{(k+2)^6}{A_{k+1}} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

или

$$A_k = 34k^3+153k^2+231k+117-\frac{(k+2)^6}{A_{k+1}} \qquad (5)$$

или

$$A_k = 5(k+1)^3+29k^3+138k^2+216k+112-\frac{(k+2)^6}{A_{k+1}}. \qquad (6)$$

Пусть $W_k = T_k - 5(k+1)^3$, тогда (6) примет вид:

$$W_k = 29k^3+138k^2+216k+112-\frac{(k+2)^6}{W_{k+1}+5(k+2)^3}$$

или

$$W_k = 29k^3+138k^2+216k+112-\frac{(k+2)^6}{W_{k+1}+(5k^2+20k+20)(k+2)}. \qquad (7)$$

Запишем (7) в виде:

$$W_k = 29k^3+138k^2+216k+112-\frac{(k+2)^5}{6*\frac{W_{k+1}}{6(k+2)}+(5k^2+20k+20)}$$

Положим $U_k = \dfrac{W_k}{6(k+1)}$, тогда имеем:

$$U_k = \frac{29k^3+138k^2+216k+112}{6(k+1)}+\frac{1}{6(k+1)}\frac{-(k+2)^5}{(5k^2+20k+20)+6U_{k+1}} \qquad (8)$$

Нетрудно убедиться, что (8) можно представить в виде четырёхступенчатой цепной

дроби

$$U_k = (2k+3)(2k+4) + \cfrac{(k+2)^3}{(k+1) + \cfrac{(k+1)}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{U_{k+1}}{(k+2)^2}}}}}. \qquad (9)$$

Полагая в (9) $P_k = \dfrac{U_k}{(k+1)^2}$, получаем

$$P_k = \frac{(2k+3)(2k+4)}{(k+1)^2} + \cfrac{\cfrac{(k+2)^3}{(k+1)^3}}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{P_{k+1}}}}}, \qquad (10)$$

а в (10) $Q_k = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{P_k}}}$, имеем:

$$Q_k = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{(2k+3)(2k+4)}{(k+1)^2} + \cfrac{\cfrac{(k+2)^3}{(k+1)^3}}{Q_{k+1}}}}} \qquad (11)$$

или

$$\left.\begin{aligned} &(3) = Q_0 \\ &Q_k = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{(k+1)^3}{(k+1)(2k+3)(2k+4) + \cfrac{(k+2)^3}{Q_{k+1}}}}} \end{aligned}\right\}, \qquad (12)$$

то есть формула автора настоящей заметки, приведённая без доказательства в [4], (потому как пришёл к этой формуле, читая [1] и [3]).

Запишем (12) в виде

$$\left.\begin{aligned} &2\ (3) = 2Z_0 \\ &Z_k = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2(k+1)^3}{2(k+1)(k+2)(2k+3) + \cfrac{2(k+2)^3}{2Z_{k+1}}}}} \end{aligned}\right\}. \qquad (13)$$

Пусть $2Z_k = H_k$, тогда (13) примет вид

$$
\left.\begin{aligned}
&2\ \ (3) = H_0\\
&H_k = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{(k+1)^3}{(k+1)(k+2)(2k+3) + \cfrac{(k+2)^3}{H_{k+1}}}}}
\end{aligned}\right\} \qquad (14)
$$

Положим $H_k = 2 + \frac{1}{G_k}$, имеем:

$$
G_k = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{(k+1)^3}{(k+1)(k+2)(2k+3) + \cfrac{(k+2)^3}{2 + \cfrac{1}{G_{k+1}}}}} \qquad (15)
$$

или

$$
G_k = 2 + \cfrac{k+2}{2k+4 + \cfrac{(k+1)^3}{(k+1)(2k+3) + \cfrac{(k+1)(k+2)^2}{2k+2 + \cfrac{k+1}{G_{k+1}}}}} \qquad (16)
$$

или

$$
\left.\begin{aligned}
&2\ \ (3) = 2 + \frac{1}{G_0}\\
&G_k = 2 + \cfrac{k+2}{2k+4 + \cfrac{(k+1)^2}{2k+3 + \cfrac{(k+2)^2}{2k+2 + \cfrac{k+1}{G_{k+1}}}}}
\end{aligned}\right\} \qquad (17)
$$

Полагая $N_k = (k+1)G_k$ получим:

$$
\left.\begin{aligned}
&2\ \ (3) = 2 + \frac{1}{N_0}\\
&N_k = 2k+2 + \cfrac{(k+1)(k+2)}{2k+4 + \cfrac{(k+1)^2}{2k+3 + \cfrac{(k+2)^2}{2k+2 + \cfrac{(k+1)(k+2)}{N_{k+1}}}}}
\end{aligned}\right\}
$$

что и требовалось.

* * * * *

Литература

1. Khodabakhsh Hessami Pilehrood, Tatiana Hessami Pilehrood. ON A CONTINUED FRACTION EXPANSION FOR EULER’S CONSTANT
2. Ю. В. Нестеренко, Некоторые замечания о   (3),Матем. заметки, 1996, том 59, выпуск 6, 865–880.
3. L.A.Gutnik. An expansion of zeta(3) in continued fraction with parameter.
4. С.Н. Гладковский. Формулы разложения в цепную дробь   (3). https://www.researchgate.net/publication/308972372_Formuly_razlozenia_v_cepnuu_drob_z3

S.N. Gladkovskii

An elementary derivation of the formula of Yu. V. Nesterenko expansion in continued fraction of a number $2\ (3)$.

The author proposed an elementary derivation of the formula of Yu. V. Nesterenko expansion in continued fraction of a number $2\ (3)$.

Keywords: continued fraction, chain fraction, zeta(3).

Гладковский Сергей Николаевич

E-mail: journaly2010@bk.ru

View publication stats